

Egzamin z Matematyki Obliczeniowej, II rok Mat.  
(Ścisłe tajne przed godz. 14:00 22 czerwca 2024.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Bardzo duży wpływ na ocenę będzie miała czytelność rozwiązań i poprawność uzasadnienia każdej odpowiedzi.

1. a) Metodą różnic dzielonych znajdź wielomian w stopnia co najwyżej 3 spełniający warunki interpolacyjne podane w tabelce, przedstawiając go w odpowiedniej bazie bazie Newtona.

$x$	$0$	$2$
$w(x)$	$1$	$-2$
$w'(x)$	$5$	$10$

Oblicz za pomocą różnic dzielonych  $w''(0)$  i  $w'''(0)$ .

- b) W konstrukcji interpolacyjnej kubicznej funkcji sklejanej  $s$  z węzłami  $u_0 < \dots < u_N$  w dodatku do warunków interpolacyjnych  $s(u_i) = a_i$  dla  $i = 0, \dots, N$  należy podać warunki brzegowe — po jednym dla każdego końca przedziału  $[u_0, u_N]$ . Niech  $s'(u_i) = b_i$  dla każdego  $i$ . Za pomocą różnic dzielonych wyprowadź równanie, w którym występują dane  $a_0, a_1$  i niewiadome  $b_0, b_1$ , opisujące warunek  $s'''(u_0) = d_0$ .

2. Niech  $f(x) = e^x$ .

- a) Znajdź minimalny stopień wielomianu interpolacyjnego  $p$  opartego na węzłach Czebyszewa w przedziale  $[-1, 1]$ , przybliżającego funkcję  $f$  w tym przedziale z błędem mniejszym niż  $10^{-8}$ .
- b) Jak zmieni się błąd aproksymacji w przedziale  $[-1, 1]$ , jeśli zostanie skonstruowany wielomian interpolacyjny  $q$  z taką samą liczbą węzłów Czebyszewa w przedziale  $[0, 1]$ , po czym do przybliżania funkcji  $f$  w przedziale  $[0, 1]$  będzie używany wielomian  $q$ , a w przedziale  $[-1, 0]$  funkcja wymierna  $\frac{1}{q}$ ?

3. a) Znajdź pierwsze cztery wielomiany z rodziny wielomianów ortogonalnych dla iloczynu skalarnego określonego wzorem

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(x)g(x)x \, dx.$$

Możesz dokonać tego przez ortogonalizację Grama-Schmidta bazy potęgowej lub za pomocą formuły trójczłonowej.

- b) Znajdź wielomian  $p^*$  stopnia co najwyżej 3, będący optymalnym przybliżeniem funkcji  $f(x) = x^4$  w sensie aproksymacji średniokwadratowej, w normie związanej z podanym wyżej iloczynem skalarnym. Wielomian  $p^*$  przedstaw w znalezionej bazie ortogonalnej.

4. a) Znajdź węzły i współczynniki kwadratury Gaussa czwartego rzędu, przybliżającą funkcjonal

$$I(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(x)x \, dx.$$

- b) i znajdź wzór na oszacowanie błędu tej kwadratury dla funkcji klasy  $C^4[-1, 1]$ .

Wskazówka: Możesz skorzystać z rozwiązania poprzedniego zadania.